УДК 517. 958:57

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭПИДЕМИЙ НА ОСНОВЕ ТОПОЛОГИИ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ

*Акад. Мукимов К.М.[1] , Нуждов Г.С.[2], Оксенгендлер Б.Л.[3],*
*Аширметов А.Х.[1], Искандарова Ф.А.[1], Тураева Н.Н. [3], Олимбоев Ж.Ш.[4]*

[1] Центр развития нанотехнологий при Национальном Университете Узбекистана им. М.Улугбека.
[2]Институт ионно-плазменных и лазерных технологий АН РУз
[3] Webster University, USA, [4]Ташкентская Медицинская Академия

✓ ***Резюме***

***Представлена топологическая модель в рамках подхода теории катастроф, предназначенная для прогнозирования распространения инфекционных заболеваний. Описаны два подхода реализации такого моделирования, использующего с одной стороны данные по динамике эпидемии, а с другой – флаги катастроф и понятие управляющих параметров изменением которых можно регулировать характер динамики эпидемии.***

***Ключевые слова: моделирование эпидемий, теория катастроф, управляющие параметры, «флаги катастроф».***

## SIMULATION OF EPIDEMICS BASED ON THE TOPOLOGY OF DISASTER THEORY

*Acad. Mukimov K.M.[1], Nuzhdov G.S.[2], Oxengendler B.L.[3],*
*Ashirmetov A.Kh.[1], Iskandarova F.A.[1], Turaeva N.N.[3], Olimboev Zh.Sh.[4]*

[1]Nanotechnology Development Center at the National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek.
[2]Institute of Ion-Plasma and Laser Technologies of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan
[3]Webster University, USA, [4]Tashkent Medical Academy

✓ ***Resume***

***A topological model is presented within the framework of the approach of the theory of catastrophes, designed to predict the spread of infectious diseases. Two approaches to the implementation of such modeling are described, using, on the one hand, data on the dynamics of the epidemic, and, on the other hand, catastrophe flags and the concept of control parameters, the change of which can regulate the nature of the dynamics of the epidemic.***

***Key words: epidemic modeling, catastrophe theory, control parameters, “catastrophe flags”.***

## FALOKAT NAZARIYASI TOPOLOGIYASI ASOSIDAGI EPIDEMIYALARNI SIMULYATSIYA QILISH

*Akad. Muqimov K.M.[1], Nujdov G.S.[2], Oxengendler B.L.[3],*
*Ashirmetov A.X.[1], Iskandarova F.A.[1], To'rayeva N.N [3], Olimboev J.Sh.[4]*

[1]M.Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti qoshidagi Nanotexnologiyalarni rivojlantirish markazi.
[2]O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi Ion-plazma va lazer texnologiyalari instituti
[3]Vebster universiteti, AQSH, [4]Toshkent tibbiyot akademiyasi

✓ ***Rezyume***

***Yuqumli kasalliklarning tarqalishini bashorat qilish uchun mo'ljallangan falokatlar nazariyasi yondashuvi doirasida topologik model taqdim etilgan. Bunday modellashtirishni amalga oshirishning ikkita yondashuvi tavsiflanadi, ular bir tomondan epidemiya dinamikasi to'g'risidagi ma'lumotlardan, va boshqa tomondan, falokatlarning bayroqlari va nazorat parametrlari tushunchasi, ularni o'zgartirish orqali epidemiya dinamikasi xarakterini tartibga solish mumkin.***

***Kalit so'zlar: epidemiyani modellashtirish, falokat nazariyasi, nazorat parametrlari, "halokat bayroqlari".***

**Актуальность**

На протяжении всего своего существования человечество непрерывно сталкивается с бактериями и вирусами, способными быть возбудителями опасных инфекционных заболеваний. Более того, процессы мутаций бактерий и вирусов непрерывны [1], и поэтому, несмотря на достигнутые успехи в борьбе с разного рода инфекционными заболеваниями [2], человечество никогда не избавится от угрозы эпидемий.

Заметный вклад в процесс организации борьбы с эпидемией могут внести различные математические методы прогнозирования распространения инфекционных заболеваний. Эти методы могут основываться на принципах дифференциального, статистического, фрактального анализа (метод Хёрста), синергетики и других современных методов [3, 4, 5, 6].

Вместе с тем указанные выше методы обладают рядом как достоинств, так и специфических недостатков. Так, например, методы, опирающиеся на дифференциальный анализ, плохо подходят для описания скачкообразных процессов [3], в то время как в течении эпидемии число заболевших может меняться именно скачкообразным образом. Методы, основанные на статистическом подходе, по определению опираются на накопленные раннее статистические данные, и могут дать сбой в случае столкновения с новой болезнью, для которой еще не набрана статистика. Методы фрактального анализа, как правило, направлены на изучение устойчивости текущего тренда. Таким образом, зачастую данный подход позволяет подтвердить или опровергнуть эффективность тех или иных мер, направленных на борьбу с уже текущей эпидемией, но не позволяет предсказать возможные вспышки заболеваний. Таким образом, перед современной эпидемиологией встает вопрос о выработке метода, позволяющего эффективно *предсказывать скачки* численности заболеваний в процессе текущей эпидемии.

В данной работе впервые представлено решение **обратной задачи** топологического анализа прогнозирования распространения инфекционных заболеваний, а именно - при помощи **теории катастроф**, представляющей собой раздел математики, который включает в себя теории бифуркаций, дифференциальных уравнений (динамических систем) и особенностей гладких отображений. Одной из главных задач теории катастроф является получение нормальной формы исследуемого объекта (*дифференциального уравнения* или *отображения*) в окрестности "точки катастрофы" и построение классификации объектов.

**Цель исследования:** Целью исследования нашей статьи является развитие методологии моделирования методами теории катастроф применительно к проблеме динамики эпидемии и апробации предложенной общей методологии в рамках двух подходов (задач); **прямой задачи** и **обратной задачи.**

**I. Методология моделирования эпидемий на основе теории катастроф.**

Большой опыт работы исследователей в этой области конкретного применения теории катастроф во многих областях науки и техники редуцировал все подходы к двум типам задач: прямой и обратной [7]: опишем их суть применительно к эпидемиям.

Прямая задача основана на исходном знании экспериментальной динамики эпидемий (например, зависимости числа заболевших от времени, т.е. *F(t)*). Далее записывается кинетическое уравнение для скорости изменения числа заболевших *(dF(t)/dt)* от числа уже болеющих (в данный момент), что обычно формируется как разность зависимости типа логистического члена (первый член) и некоего члена, ускоряющего затухание болезни (второй член) т.е.

$$\frac{\quad}{\quad} \qquad \left(1 \quad - \right) \qquad\qquad (1)$$

Здесь – полный «резервуар» людей «готовых к заболеванию», - различные факторы (био-медицинские, природные, социальные…). Далее, исходя из условия «стационарной точки» [6,7] и ряда переобозначений (см. [7]), несложно получить уравнение, связывающее друг с другом через исходные данные: ).

Пусть эта зависимость имеет вид: $\Omega\big( , \qquad \big)\big)$ (2) тогда, преобразуя эту зависимость к каноническому виду теории катастроф (см. [7,8]), получим пространство управляющих параметров, что позволит немедленно определить тип модели (то типу катастроф). Отметим, если эту программу удается воплотить с уже выбранными, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, то попытка моделирования считается корректной, а параметры $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, и др. определяют все пути влияния на эпидемию, т.е. – управления ее динамики.

Особенно показателен этот метод моделирования с помощью двух управляющих параметров $(\alpha, \beta)$, что приводит к следующей характерной зависимости между ними;

(3)

Это можно считать удачным результатом моделирования; если же уравнение (3) имеет иной вид, то это означает, что выбраны неудачные управляющие параметры, и поиск надо продолжать дальше.

**Обратная задача** строится из попыток трактовки всех экспериментальных данных по эпидемии в рамках характерных топологических характеристик, приведенных в различных соответствующих рисунках (флагов катастроф), которые известны заранее [7,8].

Опишем общую схему такого моделирования на примере 2-х управляющих параметров, приводящих к так называемой «катастрофе сборки» [7].

**IY. Результаты.**

Наиболее детально методология обратной задачи будет основана на методах топологии, включающих представления о «флагах катастроф» являющихся основой категориальной сетки сквозь которую необходимо «просеять» всю информацию, полученную в экспериментах по динамике эпидемии.

Итак, пусть число величин, характеризующих динамику эпидемии, есть $N$, а число предполагаемых характеристик, от которых зависит индивидуальность рассматриваемой эпидемии через - $M$. Величины $N$ и $M$ в теории катастроф имеют названия параметров порядка (N) и управляющих параметров *(M)*. Очевидно, что $N$ есть функция $M$: *N=f(M)*. Главная идея теорий катастроф состоит в том, что при <u>правильном</u> выборе всех M, функция $\mathrm{N} = \mathrm{f(M)}$ всегда <u>одна и та же</u>, универсальная в Природе: именно в этом случаи очень сложная многомерная фигура в пространстве $\{[N, M]\}$ будет индивидуальной, и именно она при каждой комбинации чисел $\{N_i\}$ и $\{N_i\}$ будет занимать свою (и только свою) клеточку в таблице Р.Тома [7,8].

Таким образом, можно четко выделить все «флаги катастроф» (топологических особенностей сложной «поверхности» *N=f(M))* – как ее непрерывных областей, так и разделяющих их скачков. Сам Р.Том первично проанализировал только *N+M=7* вариантов [7], однако позднее [8] это число изученных ситуации увеличилось, исследованиями его последователей. Большая практика использовании теории катастроф в самых различных областях (физики, химии, биологии, техники, в социальных науках и т.д.), показали достаточность информативности описываемых ситуации, но с *N=1* и *M=2*; поверхность же «равновесия» получила название «поверхности Уитни» [7]. Специфический вид этой поверхности изображен на Рис.1. Она, как видно, содержит 5 определяющих ее (и только ее) характеристик: 1. Модальность; 2. Недостижимость; 3. Скачок; 4. Расходимость; 5. Гистерезис.

Один из популярных методов использований теории катастроф состоит в том, что, во-первых подбираются разумные управляющие параметры (см., в плоскостях на Рис.1), и во-вторых «просеиваются» все экспериментальные данные сквозь «сито» указанных выше «флагов катастроф». Имеется альтернатива: если с данными параметрами удается найти все пять флагов, то это мгновенно позволяет считать, что осуществлен положительный результат топологического моделирования, что немедленно позволяет записать как уравнение *N=f(M)* так и функциональный вид криволинейного треугольника на плоскости управляющих параметров; если же с выбранными управляющими параметрами не удается найти соответствие между флагами катастроф и экспериментальными – то делается однозначный вывод о том, что данная пара управляющих параметров не является окончательным и подходящим описанием данной эпидемии (как и вообще всех других явлений) в предлагаемом варианте моделирования. Все специфические детали такого анализа на основе модели *N=1* и *M=2* в рамках поверхности Уитни (она называется «сборка») применительно к эпидемии приведен ниже.

**Y. Обсуждение моделирования в рамках обратной задачи теории катастроф: детальный анализ.**

Прежде всего, следует отметить, что важной особенностью потенциально катастрофической ситуации является, во-первых, способность изучаемой системы к накоплению некой величины, в дальнейшем и приводящей к катастрофе, и, во-вторых, некоторая инерционность.

Определим ось X, как **заражаемость (заразность/карантинные меры)**, ось Y - как **скорость проявления симптомов**, ось Z - число пациентов в день, поступающих в больницы. В качестве рабочей модельной поверхности выберем поверхность типа "складка" [7]. Определив параметры по осям X и Y можно получить точку A с соответствующими координатами ($X_1$,$Y_1$) и спроецировать ее на поверхность катастроф (точка $E_1$), что даст нам значение параметра на оси Z. Совокупность таких проекций задает кривую *a*. Аналогичным образом можно определить кривую *b* [Рисунок 1].

Проверим, удовлетворяет ли построенная нами модель критериям теории катастроф.

**1) Модальность**. **Система должна иметь два и более состояний**.

Такая ситуация возможна, когда в окружении неявного носителя болезни накапливаются другие носители, которым в дальнейшем практически одновременно потребуется госпитализация. Тогда возможен переход системы из точки $H_1$ в точку $H_3$.

**2) Недостижимость**. **Имеется как минимум одна неустойчивая точка.**

Такой точкой может быть $H_2$. Такая точка достигается в случае, когда число поступающих в день пациентов равно числу выздоровевших.

**3) Скачок**. **Малое изменение может дать большой скачок.**

Такая ситуация может сложиться, когда карантинные требования начинают соблюдаться меньше (переход из точки $X_1$ в $X_2$), а симптомы заболевания проявляются через заметное время после заражения (переход системы из точки $E_1$ в $E_2$, а затем – в $E_3$) [Рисунок.1].

**4) Расходимость**. **Незначительное изменение параметра X может привести систему в одну из стационарных точек**.

В результате малых изменений параметра X система из т. G может перейти либо в $G_1$, либо в $G_2$. Затем, например, ввиду мутации вируса, дающей более легкое протекание болезни, система сместится назад по оси Y и перейдет в т. $E_1$ или т. $H_1$. Тогда в первом случае (т. $E_1$) карантинные меры достаточны, и система стабильна. Во втором случае (т. $H_1$) карантинные меры недостаточны и число заболеваний возрастает (т. $H_3$).

**5) Гистерезис**. **Параметры системы, при которых происходит скачок, могут не совпадать с параметрами обратного скачка.**

При ослаблении карантина система начнет смещаться по оси X вправо от точки E1 к т. $H_1$, где произойдет скачок в т. $H_3$ и движение к т. K. Тогда при усилении карантина (смещении влево) система может совершить обратный скачок не в т. $H_3$, а в т. $E_3$. Т.е. Для нормализации ситуации нужен более строгий карантин, чем тот, что был при скачке.

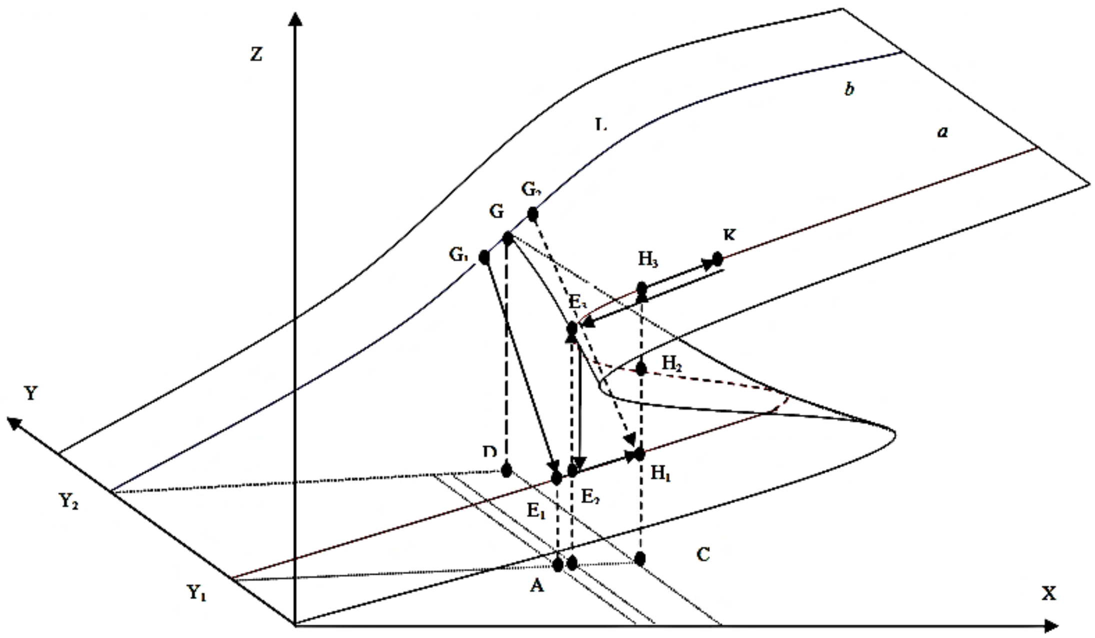


*Рисунок 1. Модельная поверхность.*

**Выводы**

Моделирование эпидемии на основе топологии теории катастроф представляется как весьма эффективный метод анализа протекания эпидемий. Показано, что в качестве корректных возможны два типа подходов (задач) теории катастроф: как прямая, так и обратная задачи. Первому из этих подходов, исходя из экспериментальных данных по динамике эпидемии, можно выделить области изменения управляющих параметров (это наиболее реальные факторы, влияющие на эпидемию). Второй подход, исходя из «флагов катастроф» необходимо «просеять» экспериментальные данные по динамике эпидемии, и, в случае успешного выявления такой возможности с опробованием множества факторов, комбинирующих проявление как биомедицинских аспектов эпидемий, социальных факторов борьбы с ней, а также других особенностей (например, наличие разнообразия географических условий, источников радиации и др.).

Эти два типа модельных задач подробно обсуждено применительно к случаю – «2 причины – один показатель эпидемий» (так называемая «катастрофа сборки»). Наиболее детально в статье описаны результаты по обратной задачи теории катастроф. Показано, что предложенная такая модель эпидемий полностью удовлетворяет необходимым критериям и может рассматриваться при помощи соответствующих методов, в частности с помощью 5 «флагов катастроф» присущих поверхности Уитни.

Таким образом, этим путем удается получить качественное описание процесса, а значит, **спрогнозировать** поведение системы при **изменении** некоторых важных **управляющих параметров**.

Выяснено, что оба типа задач способны к обобщению на случай «многих причин – многих показателей».

Изложенные представления об исследовании эпидемии на основе топологии теории катастроф имеют определенную перспективу их применения и в случае SARS-CoV-2, что послужит важным дополнением уже существующих попыток на основе других подходов (напр., [5,6,9,10]). Авторы статьи надеются на реализации этих планов в последующих публикациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:


1. В.М. Жданов, Эволюция вирусов Медицина, Москва, 1990, 376 с.
2. The New York Times (28 March 2008). — «Vaccinations are among the most important health advances in history». Дата обращения: 15 января 2019. Архивировано 18 мая 2010 года.)
3. Ю.И. Гильдерман. Лекции по высшей математике для биологов, Наука, Новосибирск, 1974, 412 с.
4. Е.Ю. Янчевская, О.А. Меснянкина. Математическое моделирование и прогнозирование в эпидемиологии инфекционных заболеваний. //Вестник РУДН. Серия: МЕДИЦИНА. 2019 Vol. 23 No. 3 328—334 RUDN DOI: 10.22363/2313-0245-2019-23-3-328-334
5. N.N. Turaeva, N. Aripova, B.L. Oksengendler. Long-range correlations in Covid-19 growth, Preprint from arXiv, 07 May 2020 PPR: PPR268542
6. А.М. Хаджибаев, Ф.Т. Адылова, А.А. Икрамов, Х.М. Касимов, Н.Б. Исхаков, ДАН РУз, 1, 7-12, 2021.
7. Р. Гилмор. Прикладная теория катастроф, Т.1 Мир, Москва, 1984, 349 с.
8. L. Cobb., Sh. Zacks. JASA, 80, № 392,793-802, 1985.
9. B.L. Oksengendler., A.X. Ashirmetov., F.A.Iskandarova et all., Nuclear Inst. and Methods in Physics Research, B. 2022. V.512, P.66-75. https://doi.org/10.1016/j.nimb.2021.12.009.
10. T.Frank. Chaos, Solitons, Fractals. 2020, 140.110194


**Поступила 09.02.2022**